Niedocenione odkrycia – mało znane epizody z historii teorii względności

Andrzej Krasiński
Centrum Astronomiczne im. M. Kopernika,
Polska Akademia Nauk, Bartycka 18, 00 716 Warszawa, Poland

1 "Golden Oldies"

Czasopismo *General Relativity and Gravitation* od ok. 10 lat przedrukowuje klasyczne stare prace z dziedziny teorii względności i pokrewnych dyscyplin (głównie kosmologii i geometrii różniczkowej). Jedno z kryteriów, według których wybieramy te prace jest następujące: praca kwalifikuje się do przedruku, jeśli zawierała wyniki znacznie wyprzedzające swoją epokę i z tego powodu nie została należycie doceniona przez współczesnych (pełna lista kryteriów – patrz [1]). Niniejszy artykuł jest poświęcony krótkiemu przedstawieniu niektórych prac tego rodzaju.

2 Sferycznie symetryczne pole grawitacyjne w próżni

Po sformułowaniu teorii względności przez Einsteina, w roku 1915, pojawił się problem znalezienia przykładów ścisłych rozwiązań równań pola grawitacyjnego. W próżni mają one postać

$$R_{\mu\nu} = 0,$$

gdzie $R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$, zaś $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ jest tensorem krzywizny czasoprzestrzeni.

Najprostszą sytuacją fizyczną, do której można te równania zastosować, jest sferycznie symetryczne pole grawitacyjne wokół izolowanego źródła.[1] Jako pierwszy rozwiązanie takie znalazł w roku 1915 Karl Schwarzschild [2]; jego forma metryczna ma postać

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{1 - 2m/r}\,\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2\right), \qquad (1)$$

gdzie m jest masą źródła. Metryka (1) jest powszechnie znana pod nazwą "rozwiązania Schwarzschilda". Pierwszeństwo historyczne Schwarzschilda nie

[1] W tamtych czasach mówiono o masie punktowej, ale dziś wszyscy unikają tego terminu – geometryczna struktura takiej konfiguracji nie zgadza się z intuicyjnym wyobrażeniem cząstki punktowej.

ulega wątpliwości, ale jego praca zawiera w zasadzie tylko samo wyprowadzenie metryki (1) z równań Einsteina, bez żadnej dyskusji ich własności. Schwarzschild przedyskutował tylko korespondencję między swoim ścisłym wynikiem, a wynikiem perturbacyjnych rachunków Einsteina w jego wcześniejszej pracy. Sposób, w jaki Schwarzschild doszedł do tego rozwiązania, jest, z matematycznego punktu widzenia, dość nieporadny, a notacja mało przejrzysta ((1) jest zapisane w notacji używanej dzisiaj).

Tymczasem, nad tym samym problemem pracował od 1913 roku (jeszcze przed sformułowaniem ostatecznej wersji równań Einsteina!) doktorant H. A. Lorentza, Johannes Droste. Jego wynik został publicznie przedstawiony na posiedzieniu Królewskiej Holenderskiej Akademii Nauk 27 maja 1916 roku, zaledwie 4 miesiące po pierwszej prezentacji rozwiązania Schwarzschilda. Okoliczności wskazują, że Droste pracował całkowicie niezależnie od Schwarzschilda i dowiedział się o wyniku Schwarzschilda dopiero podczas przygotowywania publikacji [3]. Praca Drostego, choć nie wolna od niepotrzebnych zawiłości i dygresji, które dziś wydają się nam naiwne, jest dojrzalsza i zawiera całkiem obszerną interpretację metryki (1), miejscami idącą w kierunku znacznie późniejszych odkryć. Sprawiedliwość historyczna wymagałaby więc, aby nadać temu rozwiązaniu nazwę "metryki Schwarzschilda – Drostego", analogicznie do praktyki zastosowanej w wielu innych przypadkach (np. dla rozwiązań Reissnera – Nordströma, Friedmanna – Lemaître'a, Taub – NUT, Bertottiego – Robinsona).

Przykładem nieporadności, naiwnej z dzisiejszego punktu widzenia, było wyprowadzenie tego rozwiązania z zasady wariacyjnej, po wprowadzeniu do funkcjonału wariacyjnego uproszczeń wynikających z założonej symetrii sferycznej i statyczności. Obliczenie funkcji podcałkowej w lagranżianie, $\sqrt{-g}R$ (g jest wyznacznikiem tensora metrycznego, R jest śladem tensora Ricciego $R_{\mu\nu}$), wymagało wcześniejszego obliczenia tensora Ricciego. Nie jest więc jasne, dlaczego Droste nie użył po prostu równań $R_{\mu\nu} = 0$. Wprowadzanie uproszczeń do funkcjonału Lagrange'a często prowadzi do błędnego wyniku; w tym przypadku Droste albo miał szczęście, albo przedtem sprawdził, że wynik jest poprawny.

Natomiast fizyczna dyskusja rozwiązania zadziwia dokładnością i nowatorstwem wniosków (mowa o nowatorstwie z punktu widzenia roku 1916). Na przykład, autor stwierdził, że przyspieszenie cząstki na orbicie jest największe dla $r = 3m$, co zgadza się ze znanym dziś faktem, że "efektywny potencjał" dla ruchu orbitalnego w tej metryce ma maksimum przy $r = 3m$. Stwierdził też, że dotarcie przez cząstkę na orbicie do powierzchni $r = 2m$ wymaga nieskończonego "czasu" t. (Jego inne uwagi pokazują jednak, że nie wiedział, iż ten nieskończony "czas" jest tylko wartością dowolnie wybranej współrzednej czasowej.)

Porównanie wyników Schwarzschilda i Drostego zmusza do zastanowienia, dlaczego praca Schwarzschilda jest dziś tak sławna, a praca Drostego mało komu znana. Autor noty edytorskiej do przedruku pracy Drostego (Tony Rothman) zasugerował, że zadziałały tu pozanaukowe czynniki socjologiczne i psychologiczne. Schwarzschild był w roku 1916 dyrektorem Obserwatorium Astronomicznego w Poczdamie, zaś jego wynik został przedstawiony na zebraniu Pruskiej Akademii Nauk w Berlinie przez samego Einsteina. Droste był wtedy młodym doktorantem, jego promotor był mniej prominentną osobistością (choć też znakomitym fizykiem), a miejsce prezentacji (Amsterdam) nie było centrum światowej nauki. Jak widać, uznanie i sława zależą nie tylko od jakości pracy i wagi wyniku...

3 Modele Wszechświata

Historia modeli Wszechświata wyprowadzonych z teorii względności jest jeszcze bardziej skomplikowana i pełna zaskakujących epizodów, niż ta opisana wyżej.

Jak wiadomo, pierwszą próbę stworzenia takiego modelu podjął sam Einstein w roku 1917. Jego rozwiązanie (patrz paragraf 6) jest dziś już tylko historyczną ciekawostką. Jest ono statyczne, więc nie może opisywać rzeczywistego Wszechświata, o którym od roku 1929 wiadomo, że się rozszerza.[2]

Pierwsze fizycznie sensowne modele Wszechświata stworzył Aleksander Friedman w roku 1922 (dla dodatniej krzywizny przestrzennej) i w roku 1924 (dla ujemnej krzywizny przestrzennej) [4]. Zostały one prawidłowo zinterpretowane i docenione dopiero po ok. 10 latach, już po śmierci autora. Nie będziemy tu zajmować się historią ich odbioru przez społeczność fizyków i astronomów, choć i ta jest pełna długotrwałych nieporozumień (patrz nota edytorska do przedruku [4]). Rozwiązania Friedmana, pierwotnie znalezione dla pyłu ze stałą kosmologiczną, zostały później uogólnione na niezerowe ciśnienie i uzupełnione o przypadek przestrzennie płaski przez Lemaître'a w roku 1927 [5], Robertsona w roku 1929 [6] i Walkera w roku 1935 [7]. Robertson i Walker wyprowadzili formę metryczną znaną dziś pod ich nazwiskiem w sposób ścisły z założeń jednorodności i izotropii czasoprzestrzeni. Można ją przedstawić na różne sposoby, w różnych układach współrzędnych. Jedno z najpopularniejszych przedstawień ma postać:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - R^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \mathrm{d}\varphi^2\right)\right], \tag{2}$$

gdzie $R(t)$ jest funkcją do wyznaczenia z równań Einsteina, zaś k jest stałą dowolną. Te modele są do dziś powszechnie używane przez astronomów, choć nie do wszystkich celów nadają się jednakowo dobrze (patrz dalej).

Pierwsze nietrywialne, choć nadal całkiem proste, uogólnienie modeli Friedmana znalazł Lemaître w roku 1933 [8].[3] Lemaître założył, że czasoprzestrzeń

[2] Edwin Hubble, powszechnie uznawany za odkrywcę ekspansji Wszechświata, do końca życia nie wierzył, że fizyczny Wszechświat naprawdę się rozszerza. Uważał on, że odkrył tylko, iż przesunięcie ku czerwieni w widmach dalekich galaktyk jest proporcjonalne do ich odległości od nas. Przeliczanie przesunięcia ku czerwieni na prędkość ucieczki uważał on tylko za wygodny sposób przedstawienia wyników, za którym niekoniecznie kryje się rzeczywisty efekt fizyczny – patrz nota edytorska do poz. [4].

[3] Model ten był do niedawna nazywany "modelem Tolmana" albo "Tolmana–Bondiego". Jest to jeszcze drastyczniejsza niesprawiedliwość, niż w przypadku Drostego – Lemaître nie tylko pierwszy znalazł to rozwiązanie, ale też przeprowadził bardzo elegancką dyskusję jego własności geometrycznych, fizycznych i astrofizycznych. Obecnie jest dla tego modelu lansowana nazwa "model Lemaître'a – Tolmana", ale nazwisko Tolmana jest tu dodane wyłącznie dla

jest sferycznie symetryczna wokół jednej linii świata obserwatora, ale nie jest jednorodna. Źródłem w równaniach Einsteina, podobnie jak w rozwiązaniu Friedmana, był pył – ciecz doskonała o znikającym ciśnieniu. Forma metryczna Lemaître'a ma postać:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \frac{{R,_r}^2 \mathrm{d}r^2}{1+2E(r)} - R^2(t,r)\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \mathrm{d}\varphi^2\right), \tag{3}$$

gdzie funkcja $R(t,r)$ spełnia równanie:

$${R,_t}^2 = 2E(r) + \frac{2M(r)}{R} + \frac{1}{3}\Lambda R^2, \tag{4}$$

$M(r)$ i $E(r)$ są funkcjami dowolnymi, Λ jest stałą kosmologiczną. Gęstość materii jest dana przez:

$$\frac{8\pi G}{c^2}\rho = \frac{2M,_r}{R^2 R,_r}.$$

Model ten zawiera już pewne elementy prawdziwej dynamiki relatywistycznej, w odróżnieniu od modeli Robertsona–Walkera, których ewolucja jest opisywana równaniem różniczkowym zwyczajnym. W modelu Lemaître'a – Tolmana (LT) można założyć dowolny (sferycznie symetryczny) początkowy rozkład gęstości materii i prędkości, a następnie badać jego ewolucję. Z równania (4) widać też, że R zależy od t poprzez kombinację $(t - t_B)$, gdzie t_B nie jest stałą, jak w modelach RW, ale *funkcją dowolną* zmiennej r. Oznacza to, że w kosmologicznej synchronizacji wybuch początkowy w modelu LT nie jest jednoczesny – zachodzi w różnych chwilach czasu t dla różnych obserwatorów. Modele Friedmanna mieszczą się tu jako przypadek szczególny odpowiadający $E = -\frac{1}{2}kr^2$, $M/r^3 = \mathrm{const}$, $R = rS(t)$ i $t_B = \mathrm{const}$. Również rozwiązanie Schwarzschilda jest przypadkiem szczególnym tego modelu; wynika ono z niego (we współrzędnych całkiem innych niż w (1), patrz dalej) gdy $M = m = \mathrm{const}$.

Lemaître użył tego modelu do pierwszej próby opisania powstawania zagęszczeń ("mgławic") we Wszechświecie. Zaproponowany przez niego mechanizm nie jest dziś uważany za rzeczywistą przyczynę powstawania galaktyk.[4] Na podkreślenie zasługuje jednak nowatorska pomysłowość i odwaga Lemaître'a: próbował on opisać powstawanie struktur w ramach ścisłej teorii grawitacji kilkadziesiąt lat wcześniej niż inni podjęli ten program przy użyciu metod przybliżonych.

Lemaître pokazał też jako pierwszy, używając tego samego rozwiązania, że pozorna osobliwość rozwiązania Schwarzschilda przy $r = 2m$ nie jest osobliwością geometryczną, lecz tylko skutkiem wyboru układu współrzędnych.

odróżnienia tego przypadku od modeli Friedmanna – Lemaître'a. Pierwszeństwo Lemaître'a nie podlega żadnej dyskusji, zaś Tolman cytował pracę Lemaître'a w swojej.

[4]Lemaître założył, że galaktyka powstaje wewnątrz sfery, na której odpychanie związane ze stałą kosmologiczną równoważy się z grawitacyjnym przyciąganiem. Dla mniejszych odległości grawitacja przeważa nad przyciąganiem i powoduje zagęszczanie materii, dla większych odległości przeważa ekspansja. Promień tej sfery jest jednak wielokrotnie większy niż typowy promień galaktyki.

Próżniowa granica ($M = \text{const}$) rozwiązania ($3-4$) jest rozwiązaniem Schwarzschilda we współrzędnych, w których ta osobliwość znika. Był to pierwszy krok na drodze do pełnego rozszyfrowania struktury geometrycznej rozmaitości Schwarzschilda[5] i do definicji pojęcia czarnej dziury.

Innym ciekawym i zaskakująco dojrzałym, wyprzedzającym swój czas, wynikiem tej pracy jest dowód, przy użyciu równań Einsteina bez znajdowania ścisłego rozwiązania, że kosmologiczna osobliwość modeli Friedmanna przy $R = 0$ nie znika w ogólniejszym przypadku, gdy rozpatrujemy metrykę z niższa symetrią i z niezerowym ciśnieniem. (Według dzisiejszej terminologii, równania badane przez Lemaître'a opisują model cieczy doskonałej z 3-wymiarową grupą symetrii typu Bianchi I.)

Praca Lemaître'a została początkowo zauważona i doceniona tylko przez jednego człowieka – Richarda Tolmana [12], który w rok później użył modelu Lemaître'a do zbadania stabilności rozwiązańa Friedmana ze względu na zaburzenia jednorodnego rozkładu gęstości materii. Podkreślmy, że Tolman pracował, tak samo jak Lemaître, w ramach ścisłej teorii Einsteina (stabilność rozwiązań jest często badana metodami perturbacyjnymi). Tolman pokazał, że rozwiązania Friedmanna są *niestabilne* względem powstawania lokalnych zagęszczeń i rozrzedzeń. Amplituda każdego lokalnego maksimum lub minimum gęstości będzie wzrastać z czasem. Z dzisiejszego punktu widzenia można powiedzieć, że Tolman wskazał sposób opisywania powstawania struktur w ścisłej teorii Einsteina i równocześnie przewidział konieczność powstawania kondensacji *oraz pustek*. Niestety, jego praca pozostawała przez długie lata niezauważona, a kiedy wreszcie zaczęła być cytowana, to tylko jako źródło wiadomości o modelu Lemaître'a, nazywanym oczywiście modelem Tolmana. Obserwacyjne odkrycie pustek w roku 1978 zostało ogłoszone jako nowe, wielkie i niespodziewane odkrycie astronomii. Sam Tolman był w pełni świadomy implikacji swojego wyniku – jego praca zawiera czytelne ostrzeżenie, że stosowanie modeli Friedmana do dużych obszarów przestrzeni i długich przedziałów czasu jest ryzykowne:

> "The foregoing results demonstrate the lack of existence of any general kind of gravitational action which would necessarily lead to the disappearance of inhomogeneities in cosmological models. (...) it is at least evident from the results obtained that we must proceed with caution in applying to the actual universe any *wide* extrapolations – either spatial or temporal – of results deduced from strictly homogeneous models."

Tolman rozważał takie zaburzenia modelu Lemaître'a, w których początkowy rozkład prędkości jest taki sam, jak w modelach Friedmana, natomiast zaburzony jest rozkład gęstości. W tym samym roku 1934 Sen [13] zbadał problem dualny: zaburzenie początkowego rozkładu prędkości przy początkowym

[5] Ostatni krok na tej drodze wykonali niezależnie Kruskal [9] i Szekeres [10], którzy skonstruowali maksymalne rozszerzenie analityczne tej rozmaitości. Interpretację współrzędnych rozwiązania Schwarzschilda, które wynikają z (3) w granicy $M = \text{const}$ podał 30 lat później Novikov [11]. Są to współrzędne spoczynkowe obserwatorów swobodnie spadających w czasoprzesatrzeni Schwarzschilda, w kierunkach radialnych, z zerową prędkością w nieskończoności.

rozkładzie gęstości takim, jak u Friedmanna.[6] Wynik był podobny, jak u Tolmana: amplituda początkowego zaburzenia prędkości będzie rosnąć z czasem.[7] Sen zrobił jeszcze jedno ważne odkrycie, potwierdzone w znacznie późniejszych pracach Sato i współpracowników [16]: zaburzony obszar o mniejszej gęstości ekspanduje szybciej niż niezaburzony model Friedmana o tej samej gęstości. Zatem, podczas ewolucji pustka powiększa nie tylko swoją amplitudę gęstości, ale też rozmiar względem ekspandującego tła:

"Arguments are given in the last section which show that (...) the original model is unstable for rarefaction. (...) Of all symmetrical spaces of the type (1) consistent with given density and metric (and negligible pressure) of any Friedmann type at an instant, this homogeneous Friedmann space has the minimum rate of expansion (or contraction)."

To była jeszcze wyraźniejsza przepowiednia powstawania pustek, niż w pracy Tolmana. Niestety, praca Sena jest do dziś zupełnie nie znana i nie cytowana.

Bondi, w pracy z roku 1947 [17], przeprowadził pierwszą systematyczną dyskusję fizycznych i astrofizycznych własności modelu Lemaître'a – Tolmana. Ta praca jest dość często cytowana, ale głównie jako źródło do wyprowadzenia modelu LT z równań Einsteina. Niestety, nie jest ona powszechnie czytana, czego dowodzi fakt, że niektóre wyniki Bondiego zostały pracowicie "odkryte" ponownie w późniejszych pracach. Ważniejsze wyniki Bondiego były następujące:[8]

1. Możliwość wystąpienia przecięć powłok. W niejednorodnym sferycznie symetrycznym modelu, powierzchnie stałej początkowej gęstości są współśrodkowymi sferami. Każda z tych sfer ma swoją własną, niezależną od innych, prędkość początkową. Może się więc zdarzyć, że sfera o mniejszym promieniu początkowym, wskutek zbyt dużej prędkości początkowej, dogoni sferę, która początkowo miała większy promień, ale małą prędkość. Takie przcięcie jest osobliwością, poza którą model staje się nieprzewidywalny. Można tę osobliwość wyeliminować przez nałożenie pewnych nierówności na funkcje definiujące model. Problem ten został w pełni rozwiązany w roku 1985 [18].

2. Możliwość istnienia tzw. "gardeł", które są uogólnieniem znanego "mostu Einsteina – Rosena" w rozwiązaniu Schwarzschilda na przypadek nieprózniowy. Własności gardeł zostały potem dokładnie zbadane przez Hellaby [19].

3. Rozróżnienie grawitacyjnego przesunięcia ku czerwieni od efektu Dopplera.

4. Możliwość powstawania czarnych dziur. Pojęcie i termin "czarna dziura" są o ok. 20 lat późniejsze od pracy Bondiego. Bondi pokazał, że wewnątrz szybko zapadającego się obłoku materii, światło może zostać "porwane" przez materię i zmuszone do zawrócenia w kierunku centrum. Była to równocześnie

[6] Użyliśmy tu dzisiejszej terminologii, sam Sen wysłowił to w nie całkiem jasny sposób.

[7] Rola rozkładu prędkości w powstawaniu struktur do dziś nie jest prawidłowo rozumiana przez astronomów. Według powszechnego przekonania za powstawanie struktur są odpowiedzialne jedynie zaburzenia gęstości. Tymczasem niejednorodny rozkład prędkości generuje struktury znacznie skuteczniej niż zaburzenia gęstości [14], i może też przekształcić początkowe zagęszczenie w pustkę [15].

[8] Wyniki te są tu opisane przy użyciu dzisiejszej terminologii, która w przeważającej częsci została wprowadzona po roku 1947.

demonstracja faktu, że model LT nadaje się do opisu powstawania i ewolucji dynamicznych czarnych dziur.[9] Równanie granicy tego obszaru (powierzchni czarnej dziury wewnątrz materii), $R = 2M$, jako pierwszy podał w roku 1970 Barnes [20], zaś przykład procesu powstawania i ewolucji czarnej dziury wewnątrz galaktyki został przedyskutowany przez autora niniejszego tekstu wspólnie z C. Hellabym [21].

5. Możliwość powstawania centralnych osobliwości. Ten aspekt modelu LT był bardzo intensywnie badany w latach 1970-tych do 1990-tych w związku z hipotezą cenzury kosmicznej.[10] Istnienie centralnej osobliwości wykryli, przy okazji rachunków numerycznych, Eardley i Smarr w roku 1979 [22].

6. Interpretacja funkcji R jako odległości jasnościowej.

7. Rozróżnienie aktywnej masy grawitacyjnej od masy spoczynkowej.

Ostatnią klasyczną pracą o modelu LT, którą tu wspomnimy, jest praca Bonnora z roku 1956 [23]. Bonnor poszedł o krok dalej niż Lemaître i zastosował model LT do opisu powstawania "mgławic" (czyli galaktyk) inną metodą. Założył on, że początkowe zaburzenie gęstości jest statystyczną fluktuacją w jednorodnym ośrodku i zbadał ewolucję takiego zaburzenia. Do opisu kosmicznego tła i samej galaktyki Bonnor używał modeli Friedmana o różnych parametrach, model LT posłużył mu do interpolacji między tymi dwoma regionami. Natrafił on przy tym na problem, który do dziś nie został rozwiązany. Mianowicie okazało się, że jeśli początkowe zagęszczenie materii ma masę galaktyki (czyli zawiera 10^{67} nukleonów) i jest statystyczną fluktuacją gęstości w chwili 1000 lat po Wielkim Wybuchu, to musi mieć amplitudę gęstości wynoszącą 10^{-34} gęstości tła. Aby jednak takie zaburzenie mogło osiągnąć w chwili obecnej gęstość obserwowaną w galaktykach, jego początkowa amplituda musiałaby wynosić 10^{-5}. Zatem, Wszechświat istnieje zbyt krótko, aby galaktyki mogły powstać w ten sposób. Początkowe zaburzenia gęstości muszą być generowane w inny sposób.

Obecnie uważa się, że początkowe fluktuacje gęstości powstały jako kwantowe fluktuacje wartości pola skalarnego odpowiedzialnego za inflację, ale jest to tylko hipoteza niepotwierdzona żadnymi ścisłymi rachunkami. Nie istnieje teoria kwantowej grawitacji, ani też nie wiadomo, w jaki sposób pole skalarne inflacji przekształca się w znaną dziś materię. Problem Bonnora nadal pozostaje nierozwiązany, mimo niezliczonych prac opublikowanych na ten temat.

Fluktuacje gęstości mogły wyłonić się z wybuchu początkowego, który wcale nie musiał być jednorodny i równoczesny, jak w modelach Friedmana. Istnienie tych fluktuacji nie jest problemem dla teorii względności, ale to wyjaśnienie nie stało się przedmiotem systematycznych badań.

---

[9] Znane powszechnie czarne dziury Schwarzschilda i Kerra są stacjonarne – opisują niezmienne w czasie stany asymptotyczne czarnych dziur.

[10] Hipoteza ta mówi, że każda osobliwość musi być ukryta wewnątrz horyzontu zdarzeń. Jej zwolennicy twierdzą, że jest ona prawdziwa w odniesieniu do "generycznych" modeli czasoprzestrzeni. Modele LT, "niegeneryczne" z powodu sferycznej symetrii, dostarczyły wielu kontrprzykładów dla różnych wcześniejszych sformułowań tej hipotezy.

4 Kosmologia newtonowska

Milne i McCrea w roku 1934 [24] dokonali dość zadziwiającego odkrycia: modele rozszerzającego się, jednorodnego i izotropowego Wszechświata można wyprowadzić z teorii Newtona, zaś równanie opisujące proces ekspansji jest takie samo, jak w modelach Friedmana; inna jest tylko interpretacja jednej ze stałych ruchu. To, co w modelach Friedmana nazywało się "indeksem krzywizny" k, w modelach newtonowskich jest całkowitą energią jednostki masy cieczy, pomnożoną przez (-2): $k = -2E$.

Warto tu przypomnieć w skrócie, jaką ewolucję przeszła kosmologia między rokiem 1915 a 1934. Do roku 1915 wszyscy astronomowie byli przekonani, że nasz Wszechświat jest statyczny. Ta wiara była tak silna, że zmusiła Einsteina do zmodyfikowania jego dopiero co sformułowanych równań pola grawitacyjnego. Oryginalne równania, jak się okazało, nie dopuszczały statycznych rozwiązań kosmologicznych. Einstein dopisał do swoich równań "człon kosmologiczny", aby dopuścić statyczny model – i znalazł taki model w roku 1917. Kilka lat później, w pracach z 1922 i 1922 roku, Friedman znalazł rozwiązania równań Einsteina, w których materia (pył) poruszała się radialnie, powodując zmiany gęstości w czasie, ale gęstość pozostawała stała w przestrzeni. Einstein wyraził się o tych rozwiązaniach, że są "podejrzane" (podejrzewał mianowicie błąd w rachunkach Friedmana) i dał się przekonać o ich poprawności dopiero po przeczytaniu listu z wyjaśnieniami od Friedmana (patrz komentarz do przedruku prac Friedmana – poz. [4]). W roku 1929 Hubble opublikował wyniki swoich obserwacji, które pokazały, że Wszechświat się rozszerza – i dopiero w tym momencie społeczność astronomów i fizyków przyjęła do wiadomości, że Wszechświat nie jest statyczny.

W międzyczasie prace Friedmana zostały zapomniane i musiało minąć jeszcze parę lat zanim informacja o jego modelach (odkrytych powtórnie i wzbogaconych o nowe elementy przez Lemaître'a [5]) przedostała się do publicznej świadomości. Dopiero wtedy, gdy było już wiadomo, że nasz rzeczywisty Wszechświat nie jest statyczny, Milne i McCrea zadali sobie pytanie: czy można taki Wszechświat opisać w teorii Newtona?

Ich metoda opiera się na jednym małym oszustwie. Rozpatrzmy kulę materii o promieniu R i powierzchnię S kuli o promieniu $r < R$ i środku pokrywającym się ze środkiem dużej kuli. Jak wiadomo, dla każdego punktu P na S całkowita siła grawitacyjna wywierana w P przez masę położoną na zewnątrz S jest równa zeru – punkt P odczuwa grawitację tylko tej masy, która jest zawarta wewnątrz S. To jest ścisły wniosek rachunkowy – ale tylko wtedy, gdy całkowita masa układu (wnętrza kuli o promieniu R) jest *skończona*. Dla układu jednorodnego nieskończonego, wartość potencjału w punkcie P pochodzącego od masy położonej na zewnątrz S jest nieskończona, więc pytanie, czy ten potencjał zależy od r, jest nierozstrzygalne (dla układów skończonych nie zależy). Stwierdzenie, że siła działająca na P pochodząca od obszaru na zewnątrz S jest równa zeru nie daje się w tym przypadku ściśle udowodnić. Tym niemniej, ponieważ siła ta jest równa zeru przy każdym skończonym R, można *założyć*, że jest ona też równa zeru w granicy $R \to \infty$.

Przy tym założeniu można rozwiązać równanie Poissona i równania ruchu. Najbardziej zadziwiającym wnioskiem z pracy Milne i McCrea jest: ten rachunek jest tak prosty, że mógł być bez przeszkód wykonany już w XVIII wieku, po rozpracowaniu matematycznych podstaw teorii Newtona. Wystarczyło tylko zadać sobie pytanie, czy Wszechświat musi być statyczny. Wszyscy byli jednak tak bardzo pewni, że znają odpowiedź i że jest ona oczywista, iż nikomu to pytanie nie przyszło do głowy...

5 Klasyfikacja rzeczywistych trójwymiarowych algebr Liego

Ten temat pojawił się w teorii względności z dużym opóźnieniem. Matematyczny problem klasyfikacji 3-wymiarowych rzeczywistych algebr Liego został rozwiązany już w roku 1898 przez L. Bianchi [25]. Okazało się, że istnieje 9 nieizomorficznych klas takich algebr, przy czym dwie klasy są ciągłymi rodzinami algebr, numerowanymi jednym parametrem każda. Bianchi nazwał te klasy typami. Metoda, której użył, okazała się dość skomplikowana: jego klasyfikacja opierała się na badaniu wymiaru i struktury algebr pochodnych. Oryginalna praca ma prawie 100 stron i zawiera kilkaset wzorów.

Pierwsze zastosowanie tej klasyfikacji w teorii względności pojawiło się ponad 50 lat później, w pracy Tauba z roku 1951 [26]. Taub rozważał próżniowe równania Einsteina dla metryk z grupami symetrii różnych typów Bianchi, działającymi na 3-wymiarowych orbitach przestrzennych.[11] Praca Tauba, z pewnym dalszym opóźnieniem, stała się z kolei inspiracją dla kosmologów. Modele Friedmana – Robertsona – Walkera mają grupy symetrii należące do typów rozważanych przez Bianchi, ale mają oprócz tego symetrię sferyczną. Czasoprzestrzenie typu Bianchi bez sferycznej symetrii są więc naturalnymi uogólnieniami modeli FRW: są one jednorodne, ale na ogół nieizotropowe.

Jednym z relatywistów zainteresowanych kosmologią był Engelbert Schücking. Wynalazł on inną, znacznie prostszą metodę wyprowadzenia klasyfikacji Bianchi – za pomocą algebraicznej klasyfikacji macierzy zbudowanej ze stałych strukturalnych 3-wymiarowej algebry Liego. Mianowicie, dla 3-wymiarowej algebry zbiór stałych strukturalnych ${C^i}_{jk} = -{C^i}_{kj}$ spełniających równania $[J_j, J_k] = {C^i}_{jk} J_i$ zawiera 9 elementów – tyle samo, ile ogólna macierz 3×3. Odwzorowanie zbioru ${C^i}_{jk}$ w zbiór macierzy H^{ij} dokonuje się za pomocą wzoru

$${C^i}_{jk} = \epsilon_{sjk} H^{si},$$

gdzie ϵ_{sjk} jest symbolem Levi-Civity. Macierz H^{ij} rozkłada się następnie na część symetryczną i część antysymetryczną, tę drugą reprezentuje się przez wektor a_i za pomocą wzoru $a_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk} H^{[jk]}$, i bada się różne możliwe relacje między wektorem a_i a kierunkami własnymi części symetrycznej $H^{(ij)}$. Wszystkie typy Bianchi pojawiają się wtedy jako nierównoważne przypadki. Rachunek

[11] Inspiracją dla Tauba miały być nieco wcześniejsze prace Gödla [27, 28], w których autor rozważał dwa wybrane typy Bianchi, nie wspominając jednak o pełnej klasyfikacji.

jest tak prosty, że daje się przedstawić na 6 stronach druku. Niestety, Schücking nigdy nie opublikował tego wyniku – przedostał się on do publicznej wiadomości przez przypadek. Autor wygłosił w roku 1957 referat na seminarium z teorii względności w Hamburgu, w którym przedstawił swoje podejście. Siedzący wśród słuchaczy Wolfgang Kundt zanotował treść referatu, a potem udostępnił swoje notatki kilku znajomym. Pierwsze zastosowania metody Schückinga, oparte na notatkach Kundta, zostały opisane w pracach Ellisa i MacCalluma [29, 30] oraz Estabrooka, Wahlquista i Behra [31]. Metoda Schückinga stała się w ten sposób znana, ale nikt nie znał nazwiska jej odkrywcy ani oryginalnego źródła. Christoph Behr, w latach 1960-tych magistrant Schückinga, dostał za zadanie rozpracowanie i opublikowanie tej metody, ale nigdy swojej pracy nie ukończył. Mimo to, na podstawie zapowiedzi w pracy [31], nazywano czasem to podejście "klasyfikacją Bianchi – Behra".

Taka sytuacja trwała do roku 2000. Wtedy to, autor niniejszego tekstu, będąc redaktorem serii "Golden Oldies", zainteresował się tą sprawą i przeprowadził systematyczne "śledztwo". W jego wyniku wszyscy uczestnicy procesu rozpowszechnienia metody Schückinga spisali swoje wspomnienia [32], zaś Kundt przetłumaczył swoje notatki na angielski i opracował je redakcyjnie, po czym zostały one opublikowane jako osobna praca [33].

6 Modele wirującej materii

Wokół tego tematu urosła legenda. W roku 1949 ukazał się artykuł Kurta Gödla [27], zaczynający się od słów:

> "All cosmological solutions with non-vanishing density of matter known at present have the common property that, in a certain sense, they contain an 'absolute' time coordinate, owing to the fact that there exists a one-parametric system of three-spaces everywhere orthogonal on the world lines of matter. It is easily seen that the non-existence of such a system of three-spaces is equivalent with a rotation of matter relative to the compass of inertia."

Gödel był już wtedy sławnym matematykiem o wielkim autorytecie, więc stwierdzenie to zostało zauważone i utrwaliło się w publicznej pamięci. Niestety, było ono od początku nieprawdziwe. Pierwsze rozwiązanie równań Einsteina opisujące czasoprzestrzeń wewnątrz wirującego rozkładu materii zostało opublikowane w roku 1924 przez K. Lanczosa [34]. Rozwiązanie Gödla było inne, nierównoważne rozwiązaniu Lanczosa, i w tym sensie było nowe w roku 1949. Odegrało ono ważną rolę w późniejszym rozwoju teorii względności, ponieważ jego niezwykłe własności (np. istnienie zamkniętych linii czasowych) zainspirowały kilka kierunków badań – między innymi badanie osobliwości (patrz nota edytorska do przedruku [27]). Inspiracja dostarczona przez Gödla polegała między innymi na tym, że podał on większość swoich stwierdzeń bez dowodu; późniejsi badacze usiłowali te dowody odtworzyć.

Gödel mylił się w jeszcze jednym punkcie: jego rozwiązanie nie jest w żadnym sensie "kosmologiczne" – nie może ono być modelem rzeczywistego

Wszechświata, chociaż do dziś bywa określane nazwą "Gödel Universe". Model Wszechświata nie może być stacjonarny; materia w takim modelu musi ekspandować.

Metryka Gödla może być przedstawiona następująco:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 + 2\mathrm{e}^{r/a}\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2r/a}\mathrm{d}\varphi^2 - \mathrm{d}r^2 - \mathrm{d}z^2,$$

gdzie a jest stałą, której wartość wyznacza gęstość materii ρ, stałą kosmologiczną λ i skalar rotacji ω:

$$\kappa\rho = 1/a^2, \qquad \omega^2 = 1/\left(2a^2\right) = -\lambda.$$

Rozwiązanie Lanczosa ma tensor metryczny:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - 2Cr^2\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi + \left[C^2\left(r^4 - r^2\right) - \lambda\left(1 - \mathrm{e}^{-r^2}\right)\right]\mathrm{d}\varphi^2$$

$$-\frac{\mathrm{e}^{-r^2}r^2\mathrm{d}r^2}{C^2r^2 + \lambda\left(1 - \mathrm{e}^{-r^2}\right)} - \mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}z^2,$$

zaś gęstość materii i skalar rotacji są równe:

$$\kappa\rho = 2\lambda + 4C^2\mathrm{e}^{r^2}, \qquad \omega = 2C\mathrm{e}^{r^2/2}.$$

Jak widać, rozwiązanie to ma bogatszą strukturę niż model Gödla – gęstość materii nie jest w nim stała i nie jest sztywno związana z wartością λ. Rozwiązanie Lanczosa, w odróżnieniu od rozwiązania Gödla ma nietrywialne granice $\omega = 0$ (reprodukuje ono wtedy "Wszechświat" Einsteina) i $\lambda = 0$. Jest ono stacjonarne i cylindrycznie symetryczne. Lanczos dokładnie przedyskutował jego własności geometryczne i fizyczne, między innymi zbadał zerowe geodezyjne, czyli tory promieni świetlnych. Ale – paradoks – nie zauważył, że materia w tym modelu porusza się ruchem wirowym. Słowo "rotacja" nie pojawia się w tej pracy. Z treści artykułu Lanczosa można domyślić się, że próbował on zinterpretować swoje rozwiązanie jako model Galaktyki.

Rozwiązanie to zostało powtórnie znalezione przez van Stockuma w roku 1937 [35], w trakcie badania czasoprzestrzeni stacjonarnych i osiowo symetrycznych.

W nieco późniejszej pracy Gödel przedyskutował różne własności modeli Wszechświata z rotacją i ekspansją, ale na podstawie samych równań Einsteina, bez przykładów ścisłych rozwiązań.[12] Według dzisiejszej terminologii rozważał

[12] Do dziś nie jest znane żadne ścisłe rozwiązanie równań Einsteina z fizycznie sensownym źródłem, w którym ekspansja i rotacja byłyby równocześnie różne od zera. Znane są "rozwiązania" z ekspansją i rotacją, w których źródłami są różne skomplikowane układy, np. ciecz anizotropowa o niezerowej lepkości i niezerowym przewodnictwie cieplnym. Tego rodzaju modele są mało przydatne. *Każdy* tensor metryczny jest rozwiązaniem równań Einsteina, jeśli dopuścimy wystarczająco skomplikowane źródło. Nieznikające składowe tensora energii-pędu interpretuje się wtedy jako strumienie ciepła albo anizotropię ciśnienia. Porównywanie takich modeli z wynikami obserwacji jest niemożliwe wskutek zbyt dużej liczby wielkości wymagających równoczesnego obserwacyjnego wyznaczenia.

on modele typu Bianchi IX. Wszystkie stwierdzenia z tamtej pracy są podane bez dowodu.

****

Seria "Golden Oldies" jest kontynuowana. Dotychczas ukazały się 33 prace [36], następnych 20 jest na różych etapach przygotowań do druku. Autorzy wielu z nich doszli do wniosków, na których przyjęcie współczesna im publiczność naukowa nie była przygotowana. Po nas, pracownikach nauki, społeczeństwo spodziewa się, że będziemy umieli docenić każdy nowy genialny pomysł, gdy się pojawi. Historia pokazuje niestety raz po raz, że nie potrafimy tego oczekiwania spełnić. Nie wystarczy wpaść na dobry pomysł i przedstawić go na seminarium, konferencji czy w publikacji.[13] Doświadczenie uczy, że od rzeczywistej wagi wyniku większy wpływ na rozpowszechnienie wiedzy o nim miewa umiejętne podsunięcie odpowiednio spreparowanej informacji zaprzyjaźnionemu dziennikarzowi... Ale to już temat na osobną historię.

Literatura

[1] http://www.mth.uct.ac.za/ cwh/GORules.txt

[2] Schwarzschild, K. (1916). Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse*, 189-196; angielskie tłumaczenie obu prac, z notą edytorską, w: *Gen. Rel. Grav.* **35** 951 (2003). Nota edytorska do tego przedruku zawiera błędy rzeczowe. Poprawka do noty w druku.

[3] Droste, J. (1917). The field of a single centre in Einstein's theory of gravitation, and the motion of a particle in that field, *Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen Proceedings* **19**, 197; przedruk, z notą edytorską, w *Gen. Rel. Grav.* **34**, 1545 (2002).

[4] Friedmann, A. A. (1922). Über die Krümmung des Raumes, *Z. Physik* **10**, 377 (1922); Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes, *Z. Physik* **21**, 326 (1924); angielskie tłumaczenie obu prac, z notą edytorską, w: *Gen. Rel. Grav.* **31**, 1985 (1999); + addendum: *Gen. Rel. Grav.* **32**, 1937 (2000).

[5] Lemaître, G. (1927). Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale de nébuleuses extragalactiques, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles* **A47**, 49; angielskie tłumaczenie (częściowo zaktualizowane): *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **91**, 483 (1931).

[13] Jaskrawym przykładem jest tu sławne rozwiązanie Kerra [37], które zostało po raz pierwszy przedstawione na Pierwszym Teksaskim Sympozjum Astrofizyki Relatywistycznej. Według autora notatki biograficznej Kerra [38] nie wzbudziło ono u tamtej publiczności ŻADNEGO zainteresowania. Uznanie i sława przyszły stopniowo potem – na szczęście dla Kerra, nie było innych pretendentów do tytułu odkrywcy.

[6] Robertson, H. P. (1929). On the foundations of relativistic cosmology *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **15**, 822.

[7] Walker, A. G. (1935). On Riemannian spaces with spherical symmetry about a line, and the conditions for isotropy in general relativity, *Quart. J. Math. Oxford*, ser. 6, 81.

[8] Lemaître, G. (1933). L'Univers en expansion, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles* **A53**, 51; angielskie tłumaczenie, z notą edytorską, w: *Gen. Rel. Grav.* **29**, 637 (1997).

[9] Kruskal, M. (1960). Maximal extension of Schwarzschild metric, *Phys. Rev.* **119**, 1743.

[10] Szekeres, G. (1960). On the singularities of a Riemannian manifold, *Publicationes Mathematicae Debrecen* **7**, 285; angielskie tłumaczenie, z notą edytorską, w: *Gen. Rel. Grav.* **34**, 1995 (2002).

[11] Novikov, I. D. (1964). R- and T-regions in a spacetime with a spherically symmetric space By Igor D. *Soobshcheniya GAISh* **132**, 3-42; angielskie tłumaczenie, z notą edytorską, w: *Gen. Rel. Grav.* **33**, 2259 (2001).

[12] Tolman, R. C. (1934). Effect of inhomogeneity on cosmological models, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **20**, 169; przedruk, z notą edytorską, w *Gen. Rel. Grav.* **29**, 931 (1997).

[13] Sen, N. R. (1934). On the stability of cosmological models *Z. Astrophysik* **9**, 215; przedruk, z notą edytorską, w *Gen. Rel. Grav.* **29**, 1473 (1997).

[14] Krasiński, A. and Hellaby, C. (2004). More examples of structure formation in the Lemaître–Tolman model, *Phys. Rev.* **D69**, 023502.

[15] Mustapha, N. and Hellaby, C. (2001). Clumps into voids, *Gen. Rel. Grav.* **33**, 455.

[16] Sato, H. (1984). Voids in expanding Universe, in: *General Relativity and Gravitation*. Edited by B. Bertotti, F. de Felice and A. Pascolini. D. Reidel, Dordrecht, pp. 289 – 312.

[17] Bondi, H. (1947). Spherically symmetrical models in general relativity *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **107**, 410; przedruk, z notą edytorską, w *Gen. Rel. Grav.* **31**, 1777 (1999).

[18] Hellaby, C. and Lake, K. (1985). Shell crossings and the Tolman model, *Astrophys. J.* **290**, 381 + erratum *Astrophys. J.* **300**, 461 (1985).

[19] Hellaby, C. (1987). A Kruskal-like model with finite density, *Class. Quant. Grav.* **4**, 635.

[20] Barnes, A. (1970). On gravitational collapse against a cosmological background, *J. Phys.* **A3**, 653.

[21] Krasiński, A. and Hellaby, C. (2004b). Formation of a galaxy with a central black hole in the Lemaître–Tolman model, *Phys. Rev.* **D69**, 043502.

[22] Eardley, D. M. and Smarr, L. (1979). Time functions in numerical relativity: Marginally bound dust collapse, *Phys. Rev.* **D19**, 2239.

[23] Bonnor, W. B. (1956). The formation of the nebulae, *Z. Astrophysik* **39**, 143; przedruk, z notą edytorską, w *Gen. Rel. Grav.* **30**, 1111 (1998).

[24] Milne, E. A. (1934). A Newtonian expanding Universe, *Quart. J. Math. Oxford* **5**, 64 (1934); McCrea, W. H. and Milne, E. A. Newtonian Universes and the curvature of space, *Quart. J. Math. Oxford* **5**, 73 (1934); przedruk obu prac, z notą edytorską, w *Gen. Rel. Grav.* **32**, 1933 (2000).

[25] Bianchi, L. (1898). Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti, *Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze* **11**, 267. Angielskie tłumaczenie, z notą edytorską, w: *Gen. Rel. Grav.* **33**, 2171 (2002).

[26] Taub, A. H. (1951). Empty space-times admitting a three parameter group of motions, *Ann. Math.*, **53**, 472; przedruk, z notą edytorską, w *Gen. Rel. Grav.* **36**, 2689 (2004).

[27] Gödel, K. (1949). An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 447; przedruk, z notą edytorską, w *Gen. Rel. Grav.* **32**, 1409 (2000).

[28] Gödel, K. (1952).Rotating universes in general relativity theory. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians.* Edited by L. M. Graves et al., Cambridge, Mass. 1952, vol. 1, p. 175; przedruk, z notą edytorską, w *Gen. Rel. Grav.* **32**, 1419 (2000).

[29] Ellis, G. F. R. and MacCallum, M. A. H. (1969). A class of homogeneous cosmological models, *Commun. Math. Phys.* **12**, 108.

[30] MacCallum, M. A. H. and Ellis, G. F. R. (1970). A class of homogeneous cosmological models, *Commun. Math. Phys.* **19**, 31.

[31] Estabrook, F. B., Wahlquist, H. D. and Behr, C. G. (1968). Dyadic analysis of spatially homogeneous world models, *J. Math. Phys.* **9**, 497.

[32] Krasiński, A., Behr, C. G., Schücking, E., Estabrook, F. B., Wahlquist, H. D., Ellis, G. F. R., Jantzen, R. and Kundt, W. (2003). The Bianchi classification in the Schücking–Behr approach, *Gen. Rel. Grav.* **35**, 475.

[33] Kundt, W. (2003). The spatially homogeneous cosmological models, *Gen. Rel. Grav.* **35**, 491.

[34] Lanczos, K. (1924). Über eine stationäre Kosmologie im Sinne der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Z. Physik* **21**, 73 (1924). Ang. tłum. z notą edytorską: *Gen. Rel. Grav.* **29**, 359 (1997).

[35] Van Stockum, W. J. (1937). The gravitational field of a distribution of particles rotating about an axis of symmetry. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **57**, 135.

[36] http://www.mth.uct.ac.za/ cwh/goldies.html

[37] Kerr, R. P. (1963) Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 237.

[38] Woods, B. (1993)
http://ifs.massey.ac.nz/mathnews/centrefolds/58/Aug1993.shtml